TEORIA ELEMENTAL DE LA GRAVITACION Y DE LOS AGUJEROS NEGROS

P. Kittl [(1)] y G. Díaz [(2)]

[(1)] Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 2777, Correo 21, Santiago, Chile.

[(2)] Departamento de Ciencia de los Materiales, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 1420, Santiago, Chile.
E-mail: gediaz@cec.uchile.cl

1.- Principio de los trabajos virtuales. Ecuaciones de Lagrange

Sean N puntos materiales de masa m_i y coordenadas F_i (x_i, y_i, z_i), donde se aplican fuerzas motoras $\overline{F_i}$, cada punto está caracterizado por coordenadas q_j. El principio de los trabajos virtuales es:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{F_i} - m_i \ddot{\overline{r}}_i, \delta\, \overline{r_i}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

Donde $\delta \overline{r_i}$ son desplazamientos compatibles con el sistema, virtuales, permite deducir que se cumplen las ecuaciones:

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (1.2)$$

Donde Q_i son las fuerzas que actúan en la coordenada q_i y L es la función de Lagrange que para una partícula libre en la mecánica clásica es:

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = T \qquad (1.3)$$

Cuando las Q_j dependen de un potencial, en coordenadas cartesianas es:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (1.4)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &L = T - U; \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Y se cumple:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1.6)$$

2.- Extremal de una integral. Ecuaciones de Lagrange e integrales primeras

Cuando se quiere extramar una integral del tipo dado a continuación:

$$\delta\int_{t_0}^{t} L\left(t,\dot{x},\dot{y},\dot{z},x,y,z\right)dt=0 \tag{2.1}$$

Con la notación conocida se debe verificar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{2.2}$$

Que son las ecuaciones (1.6). Por lo tanto, en general, cuando se quiere resolver un problema de dinámica hay que buscar un Lagrangiano L que mediante las (2.2) dan las ecuaciones diferenciales necesarias. Cuando L no depende de t y se trata de un problema con campo estático se obtiene una integral primera de acuerdo a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}-L\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}\right]\dot{x}=0 \tag{2.3}$$

Y por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y}+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z}-L=\mathrm{cons\,tan\,te}=E \tag{2.4}$$

Es una integral primera y la constante E se denomina energía. Cuando L no depende de una determinada coordenada se verifica, por ejemplo:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial y}=0;\\&\frac{\partial L}{\partial z}=0\end{aligned} \tag{2.5}$$

Lo que da, reemplazando en (2.2)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=0;\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)=0;\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \text{constante};$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \text{constante} \qquad (2.7)$$

Las (2.7) constituyen, junto con la (2.4), las soluciones del problema.

3.- Ecuaciones de la dinámica y Lagrangiano

En el caso de que se adopten coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= \rho\, sen\theta \cos\varphi \\ y &= \rho\, sen\theta\, sen\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned} \qquad (3.1)$$

La velocidad se determina con:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\,\text{sen}\theta \cos\varphi + \rho \cos\theta\dot{\theta} \cos\varphi - \rho\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi + \rho \cos\theta\dot{\theta}\,\text{sen}\varphi + \rho\,\text{sen}\theta \cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \dot{\rho} \cos\theta - \rho\,\text{sen}\theta\dot{\theta} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Y su módulo

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\rho}^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\text{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2 \qquad (3.3)$$

Si el potencial es sólo función de la distancia ρ a un punto atractivo ρ = 0 donde está la masa M.

$$\begin{aligned} &F = -f\frac{Mm}{\rho^2} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-f\frac{Mm}{\rho}\right) = -m\frac{\partial}{\partial\rho}\left(-\frac{fM}{\rho}\right) \\ &U = -\frac{fM}{\rho}; \\ &m = 1 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Siendo f la constante de gravitación universal.

Cuando el movimiento es plano, tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ el Lagrangiano, fórmulas (1.3), (1.5), (3.3) y (3.4) es:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{fM}{\rho} \qquad (3.5)$$

Como L no depende de t se tiene (2.4):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho}; \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \rho^2 \dot{\varphi} \\
&E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \dot{\rho} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{fM}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{fM}{\rho} \\
&E = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{fM}{\rho}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Como U no depende de φ se tiene:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \tag{3.7}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \rho^2 \dot{\varphi} = A(\text{cons tan te}) \\
&E = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{fM}{\rho} = \text{cons tan te}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Las ecuaciones (3.8) resuelven el problema dinámico del movimiento planetario, tanto en su trayectoria espacial como temporal.

4.- Relatividad restringida y Lagrangiano relativista

En relatividad restringida se demuestra que la energía de una partícula de masa unitaria en reposo respecto del observador vale:

$$\mathrm{E} = \mathrm{c}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mathrm{c}^2}}} - 1 \right) \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) corresponde a un Lagrangiano

$$\mathrm{L} = \mathrm{c}^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mathrm{c}^2}} \right) \tag{4.2}$$

Se comprueba que de acuerdo a (2.5)

$$\mathrm{E} = \dot{x}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{z}} - \mathrm{L} \tag{4.3}$$

En un sistema donde actúan fuerzas gravitatorias un sistema de referencia con movimiento acelerado –g, siendo g el campo local, vale la relatividad restringida. Así que en la fórmula (4.2) se debe reemplazar la velocidad $\mathrm{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ por la que tendría el sistema si actuara el campo gravitatorio en sentido contrario. Los elementos e longitud y tiempo se transforman de acuerdo a:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{4.4}$$

Donde L está tomado paralelo al movimiento. Las componentes normales no se alteran.

5.- Movimiento planetario en la mecánica clásica y relativista. Elemento de línea de Schwarzchild

Una partícula material sometida a un campo gravitatorio que proviene de un cuerpo de masa muy superior a la de la partícula y que tiene simetría esférica concentrado en una esfera de radio R, a distancias ρ >> R es estático y la velocidad de una partícula que llaga desde el infinito es:

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = f\,\frac{Mm}{\rho} \tag{5.1}$$

La fórmula (5.1) da la expresión de la velocidad que tendría la partícula en esa posición para que un observador en ella creyera que está en reposo.

En un sistema muy alejado sobre el que no actúa el campo gravitatorio el elemento de línea de la relatividad restringida es

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 sen^2\theta d\rho^2 \tag{5.2}$$

En el entorno cercano a la masa M el elemento de línea se transforma en:

$$ds^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{2Mf}{\rho c^2}\right) - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2Mf}{\rho c^2}} - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \tag{5.3}$$

observando desde un punto muy lejano. Porque:

$$\begin{aligned}
&dt = dt_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},\\
&d\rho = \frac{d\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\\
&v^2 = \dot{\rho}_0^2 = \frac{2Mf}{\rho_0},\\
&\rho\, d\theta = \rho_0 d\theta_0\\
&\rho\, \mathrm{sen}\theta\, d\varphi = \rho_0 \mathrm{sen}\theta\, d\varphi
\end{aligned} \tag{5.4}$$

En las fórmulas (5.3) sólo se transforma el tiempo y la componente longitudinal del movimiento, las componentes normales no se transforman y se han eliminado los subíndices cero (0).

Corresponde entonces un Lagrangiano:

$$L = c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Mf}{c^2\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{1 - \frac{2Mf}{c^2\rho}} + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \mathrm{sen}\theta\dot{\phi}^2}\right) \tag{5.5}$$

La fórmula (5.3) obtenida en forma elemental se debe a Schwarzchild. La trayectoria de un planeta observada desde una posición suficientemente lejos está dada por:

$$\delta\int L dt = 0 \tag{5.6}$$

O lo que es lo mismo:

$$\delta\int ds = 0$$

Suponiendo el movimiento plano $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y aplicando las (2.5) y (2.8) se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\dot{\rho}}{\left(1 - \frac{2Mf}{c^2\rho}\right)R}; \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\rho^2\dot{\phi}}{R} \\
&R = \sqrt{1 - \frac{2Mf}{c^2\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2\left(1 - \frac{2Mf}{c^2\rho}\right)} - \frac{\rho^2\dot{\phi}^2}{c^2}} \\
&E = c^2 - \frac{c^2}{R}\left(1 - \frac{2Mf}{c^2\rho}\right) \\
&A = \frac{\rho^2\dot{\phi}}{R}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Las dos últimas fórmulas donde aparece E = constante y A = constante y que corresponden al teorema de la conservación de la energía y del teorema de las áreas de la mecánica racional, permiten resolver el problema del movimiento planetario explicando las diferencias con la solución de la mecánica clásica, como el movimiento del perihelio de Mercurio.

6.- Movimiento de un punto material con trayectoria radial en un campo gravitatorio

Si el movimiento del punto material es radial entonces $\dot{\vartheta}=0,\dot{\varphi}=0$ y el elemento de linea de Schawarzschil (5.3) se transforma en

$$ds^2=c^2dt^2\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)-\frac{d\rho^2}{1-\dfrac{\rho_0}{\rho}} \tag{6.1}$$

$$\rho_0=\frac{2Mf}{c^2}$$

El Lagrangiano (5.5) se convierte en

$$L=c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{\rho_0}{\rho}-\frac{\dot{\rho}^2}{c^2\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}}\right) \tag{6.2}$$

Una integral primera se evalúa como en (5.6)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}=\frac{\dot{\rho}}{\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)R},\ R=\sqrt{1-\frac{\rho_0}{\rho}-\frac{\dot{\rho}^2}{c^2\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)}}\\
&\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\dot{\rho}-L=E,\ E=\frac{\dot{\rho}^2}{\left(1-\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)R}-c^2+c^2R\\
&E=-c^2+\frac{c^2}{R}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

El valor de E se obtiene con condiciones de contorno, si adoptamos que el punto material tiene en el infinito velocidad nula, se obtiene

$$\begin{aligned}
&R\left(\rho\approx\infty,\dot{\rho}=o\right)=1\\
&E\left(\rho\approx\infty,\dot{\rho}=o\right)=-c^2+c^2=0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Con E = 0 el valor de (6.3) es

$$\frac{\dot{\rho}^2}{c^2}=\frac{\rho_0}{\rho}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \tag{6.5}$$

Derivando (6.5)

$$\frac{\ddot{\rho}}{c^2} = -\frac{\rho_0}{2\rho^2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left(1-\frac{3\rho_0}{\rho}\right) \tag{6.6}$$

La ley de gravitación de Newton se obtiene como caso límite cuando $\rho \gg \rho_0$

$$\ddot{\rho} \approx -\frac{\rho_0 c^2}{2\rho^2} = -\frac{2Mf}{c^2}\frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{Mf}{\rho^2} \tag{6.7}$$

En el caso general dado por (6.6) cuando $\rho \gg \rho_0$ la fuerza $m\ddot{\rho}$, es atractiva, pero cuando $\rho=3\rho_0$ se anula y en la zona $\rho_o < \rho < 3\rho_0$ es repulsiva. Cuando el radio de la masa m es ρ_0 se trata de un agujero negro. En el entorno de un agujero negro las partículas son rechazadas. Sólo llegan a penetrarlo si tienen una energía adicional, en caso contrario será rechazada. Con E = 0 la velocidad ρ se anula en $\rho=\rho_o$. Cuando la partícula está cargada eléctricamente en la zona $\rho_o < \rho < 3\rho_o$ se frena y emite radiación, pierde una energía adicional y luego es rechazada. Si $E \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\rho}^2}{c^2} &= \left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 - A\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)^3 \\
\frac{\ddot{\rho}}{c^2} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\left[\frac{3}{2}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)A-1\right] \\
A &= \left(1+\frac{E}{c^2}\right)^{-2}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Para $\rho/\rho_o \gg 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{\rho}}{c^2} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2}\left[\frac{3}{2}\left(1+\frac{E}{c^2}\right)^{-2}-1\right] \\
&= -\frac{Mf}{\rho^2}\left[3\left(1+\frac{E}{c^2}\right)^{-2}-2\right]
\end{aligned} \tag{6.9}$$

7.- Teoría gravitacional de la luz

La propagación de la luz en un sistema inercial se hace a la velocidad constante c, luego

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = c^2 \tag{7.2}$$

Por lo tanto, el elemento de línea es

$$ds^2 = -v^2 dt^2 + c^2 dt^2 = 0 \tag{7.2}$$

Observando localmente se cumple

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0 \tag{7.3}$$

Transformando de la misma manera que (5.3)

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{\rho_0}{\rho}} - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 sen^2\theta\, d\varphi^2 \tag{7.4}$$

El lagrangiano vale

$$L = c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}\right) = c^2 \tag{7.5}$$

La integral a extremar es

$$\int L dt = c^2 \int dt \tag{7.6}$$

dt se obtiene de (7.4). En el caso plano

$$\int dt = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 d\rho^2} \tag{7.7}$$

Aplicando la integral primera (2.8) se obtiene

$$\frac{\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}} = const \tag{7.8}$$

La integración (7.8) permite obtener la trayectoria luminosa y la desviación de un rayo de luz por un cuerpo esférico de masa M, como fue obtenido por Einstein en 1916.

8.- Conclusiones y Bibliografía

El presente trabajo quiere presentar un esquema para obtener una teoría de la gravitación, según la relatividad generalizada, de la manera no sólo más breve posible sino más simple, dejando de lado el uso del cálculo tensorial. Obviamente no pretende suplantar los textos del cálculo de variaciones, mecánica analítica y relatividad con que hay que complementar este texto. El esquema desarrollado es, brevemente

Principio de los trabajos virtuales →

Ecuaciones de Lagrange

Principio de equivalencia de la relatividad general (sistema acelerado ↔ campo gravitatorio)

→

Extremal de una integral

Relatividad especial → Lagrangiano relativista

Lagrangiano gravitacional

Efectos clásicos

Integrales primeras

Los resultados son clásicos, encontrables sin demasiado esfuerzo en la bibliografía, que es amplísima, y donde se pueden dilucidar los detalles para obtener las soluciones de las ecuaciones aquí planteadas.

Como ejemplo, para la mecánica clásica, se pueden consultar:
- Goldstein, H., Classical Mechanics, Addison Wesley, 1959, Massachussets.

Los detalles de la teoría de la relatividad se pueden ver en:
- Bergman, P. G., Introduction to the Theory of Relativity, Dover, 1976, New York.
- von Laue, M., La Théorie de la Relativité. Traducción de G. Leland, París, Gauthier-Villars, 1924, Capítulo VII-Dinamique, N° 27, e: Le principe de

Hamilton, f: Les equations de Lagrange de seconde espece et les equations de Hamilton.
- Becquerel. J., Le Principe de Relativité et la Théorie de la gravitacion, Paris, Gauthier-Villars, 1922, Capítulo IX- Dinamique de la relativité, N° 42. Capítulo XIV-Théorie de la gravitacion et dinamique, N° 79. N° 91.